

02/03/15.

Φ0) 1

Άσκ (3): Νόο $\exists N \in \mathbb{N} : 2^n > n^3, \forall n \geq N$.

Νόο: • Για $n=1 \Rightarrow 2^1 = 2 > 1^3 = 1$

$$\textcircled{\otimes} \boxed{P(n) : 2^n > n^3}$$

$P(1)$ αληθής

$$\bullet \text{ Για } n=2 \Rightarrow 2^2 = 4 \not> 2^3 = 8$$

$$\bullet n=9 \Rightarrow 2^9 \not> 9^3$$

$$\bullet \text{ Για } n=10 \Rightarrow 2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$$

Θέτουμε $N=10$ κ' θα δείξουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq 10 = N$.

Εμπειρική Πρόσθεση: $\forall n \geq 10 : \eta \ P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \eta \varsigma \delta \eta \ 2^n > n^3 \textcircled{\otimes}$
Θ.δ.ο $2^{n+1} > (n+1)^3$

$$\text{Θα έχουμε: } 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \textcircled{\otimes} n^3 \cdot 2$$

$$\text{Άρκει νδο } 2 \cdot n^3 \geq (n+1)^3$$

$$| \text{μοδώνω} \ 2n^3 - (n+1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} \cdot n)^3 - (n+1)^3 \geq 0 \textcircled{\otimes}$$

$$\textcircled{\otimes} \text{ Είναι: } (\sqrt[3]{2} \cdot n)^3 - (n+1)^3 =$$

$$= \underbrace{[(\sqrt[3]{2} \cdot n)^2 + (\sqrt[3]{2} \cdot n)(n+1) + (n+1)^2]}_{>0} [\sqrt[3]{2} \cdot n - (n+1)]$$

$$\text{Άρα αρκει νδο } \sqrt[3]{2} \cdot n - (n+1) \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2} \cdot n - n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} < 5 \quad \text{Έχει εννοία } n \geq 10 (!)$$

$$\text{Άρα θα έχουμε } 2n^3 - (n+1)^3 \geq 0 \text{ και άρα } 2^{n+1} > (n+1)^3$$

άρκ η $P(n+1)$ αληθής άρα η $P(n)$ λέγει $\forall n \geq 10$.

Αγκ (4) : (i) NSO $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(ii) NSO $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Πείρα : (i) Για $n=1$: $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2 = 1$

$P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2} \right)^2$

• $P(1)$ αληθής.

• Επαγωγική Υπόθ. $\Rightarrow P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ (*)

• $P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$

Είπαμε : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{P(n)} + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 =$
 $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$
 $= \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4n + 4]}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} =$
 $= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$

Άρα η $P(n+1)$ αληθής

(AME) $\Rightarrow P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma, \forall n \geq 1$.

(ii) $P(n) : \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ ~~αληθής~~

• $P(1) : (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1 = 1 \cdot 1!$

άρα $P(1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$.

• Επαγωγική Υπόθεση : $P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma : \sum_{k=1}^n k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

• Δείχνω ότι $P(n+1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$ ~~αληθής~~

$$\sum_{k=1}^{n+1} k k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \quad (*)$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)! \cdot (n+2) - 1 =$$

$$= (n+2)! - 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k k! = (n+2)! - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(n+1): \alpha \gamma \delta \psi \xrightarrow{AME} P(n): \alpha \gamma \delta \psi \quad \forall n \geq 1.$$

1-1

$$\bullet 1^1 + 2^1 + \dots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad [\text{Προσωπική Άσκηση}]$$

$$\bullet 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\text{Γενικά: } 1^d + 2^d + \dots + n^d = ? \quad \forall (d \geq 1).$$

$$= \frac{1}{d+1} \cdot \sum_{j=0}^d \binom{d+1}{j} B_j (n+1)^{d+1-j}$$

$$B_m = \frac{1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k \quad (\text{Αριθμοί Bernoulli}).$$

$$B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0.$$

(*) Ακολ. Fibonacci: $(f_n)_{n \geq 1}: f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3$
 $f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21.$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

(i) NSO $\sum_{k=1}^n F_k = f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 : P(n)$

$$\bullet n=1 \Rightarrow f_1 = 1 : f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow P(1): \alpha \gamma \delta \psi$$

$$\bullet \text{Εκφράζουμε Υπόθεση: } P(n): \alpha \gamma \delta \psi \Rightarrow f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1. (*)$$

$$\bullet \text{Για συν } P(n+1): f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} \stackrel{(*)}{=} f_{n+2} - 1 + f_{n+1} =$$

$$= f_{n+3} - 1 = f_{(n+1)+2} - 1 \bullet \text{Αρα } n \text{ } P(n+1): \alpha \gamma \delta \psi \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{AME} P(n): \alpha \gamma \delta \psi \quad \forall n \geq 1$$

(ii) Nb0: $f_n = \frac{\alpha^n - b^n}{\sqrt{5}}$, où $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\forall n \geq 1$.

$$P(n) : f_n = \frac{\alpha^n - b^n}{\sqrt{5}}$$

• Pour $n=1$: $f_1 = 1$ $\frac{\alpha^1 - b^1}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow P(1) : \alpha \text{ vérifie.}$

• Pour $n=2$: $f_2 = 1$ $\frac{\alpha^2 - b^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha+b)(\alpha-b)}{\sqrt{5}} = \alpha+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow P(2) \alpha \text{ vérifie.}$

• Étape de récurrence : Il $P(n)$ est vraie α vérifie, $\forall n=1, \dots, n-1$.
 On a $f_n = \frac{\alpha^n - b^n}{\sqrt{5}}$, $1 \leq n < n$. (*)

• $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \stackrel{(*)}{=} \frac{\alpha^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^{n-2} - b^{n-2}}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\alpha^{n-1} - b^{n-1} + \alpha^{n-2} - b^{n-2}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\alpha^{n-2}(\alpha+1) - b^{n-2}(b+1)]$$

α, b pifés w.s $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ b^2 = b + 1 \end{matrix} \right\} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - b^{n-2} \cdot b^2] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [\alpha^n - b^n]. \text{ Apr } n \text{ } P(n) \alpha \text{ vérifie}$$

Apr $P(n)$ α vérifie $\forall n \geq 1$.

Ασκ. 6 Να υπολογίσει η η-οριζή δύναμη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Λύση $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$ (χαρακτηριστικό πολ/μο).

$\Rightarrow$ ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

δηλ οι $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Αφού $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται (θέλουμε οι ρίζες του $P(\lambda)$ να είναι ανά 2 διαφορετικές) $\rightarrow$

$\Rightarrow \exists P \in \text{M}_{\text{ext}}(\mathbb{R}) : P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

οπότε $A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ (ΠΑΝΜΙΚΗ II)

(ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ): $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$, όπου $F_0 = 0$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} : P(n)$

Επαγωγική Υπόθεση : $P(n) : \alpha \eta \delta \psi$

$\cdot A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \Rightarrow P(n+1) : \alpha \eta \delta \psi$

Αρα από ΑΜΕ $\Rightarrow P(n) : \alpha \eta \delta \psi \quad \forall n \geq 1$.

Σημείωση | Από την Ασκ. (5) $\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} & \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$A^n = P \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Εύρεση του F_n .

Παρατήρηση: $|A^n| = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \Rightarrow F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (F_n)^2 = |A|^n$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -1$

$$\Rightarrow \boxed{F_{n+1} \cdot F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n}$$

✓

Ασκ (8) Νδo. Το γινόμενο n ηγόμενους διαδοχικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του n .

Λύση

Γενική μορφή n ηγόμενους διαδοχικών αριθμών:

$$k, k+1, \dots, k+(n-1), \quad \forall k \geq 1.$$

Τότε θ.δo. $A = k \cdot (k+1) \cdot \dots \cdot (k+n-1)$ είναι πολλαπλό του n .

Ευχρηστικά διαίρεση του k με το n .: $k = n \cdot q + r, 0 \leq r < n$.

• $r=0 \Rightarrow k = n \cdot q \Rightarrow n | k$
 $k | A \quad \left. \vphantom{k | A} \right\} \Rightarrow n | A.$

• $r \neq 0$ $1 \leq r \leq n-1 \Rightarrow 1 \leq n-r \leq n-1$

$$A = k(k+1) \cdot \dots \cdot (k+n-r) \cdot \dots \cdot (k+n-1) \Rightarrow k+n-r | A$$

Οπώς $k+n-r = n \cdot q + r + n - r = n(q+1) \Rightarrow n | k+n-r$
 $\Rightarrow n | A$